Проблемы физики, математики и техники, № 4 (9), 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

КУБИЧЕСКИЕ НЕАВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ В СМЫСЛЕ СОВПАДЕНИЯ ОТРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ВЛОЖИМЫМ СИСТЕМАМ

М.С. Белокурский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE CUBIC NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEMS, EQUIVALENT IN SENSE OF COINCIDENCE OF REFLECTING FUNCTIONS TO EMBEDABLE SYSTEMS

M.S. Belokursky

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены необходимые и достаточные условия, при которых неавтономные дифференциальные системы с кубической правой частью эквивалентны в смысле Мироненко вложимым системам.

Ключевые слова: *отражающая функция, вложимая система, дифференциальная система, двухточечная краевая задача.*

Necessary and sufficient conditions for nonautonomous differential system with cubic right-hand side to be equivalent to embedable system in sense of Mironenko were obtained.

Keywords: *reflecting function, embedable system, differential system, two-point boundary-value problem.*

Введение

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = S(t,x), \ t \in R, \ x^T = (x_1,\dots,x_m) \in R^n \qquad (0.1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Отражающей функцией [1] системы (0.1) называется функция, определяемая формулой

$$F(t,x) = \varphi(-t;t,x),$$

где $\varphi(t;\tau,x)$ есть общее решение системы (0.1) в форме Коши. Для любого решения $x(t)$ этой системы верно тождество

$$F(t,x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t).$$

Это свойство можно принять и за определение отражающей функции [2, с. 16]. Несмотря на то, что отражающая функция определяется через решения системы, разработаны методы, которые позволяют находить отражающую функцию, не используя определение. Более того, даже зная лишь некоторые свойства (например, периодичность) отражающей функции можно уже исследовать поведение решений самой системы, не прибегая к построению отражающей функции. Больше о методе отражающей функции и его применении можно найти в [2]–[7], а также на сайте www.reflecting-function.narod.ru.

Простейшим квазимногочленом называется комплекснозначная функция переменного t вида $t^k e^{\nu t}$, где $k \in N_0, \nu \in C$. Всякая линейная комбинация простейших квазимногочленов с комплексными коэффициентами называется квазимногочленом. Компонента x_i системы (0.1) называется вложимой [8, с. 47], если для любого решения $x(t) = (x_1(t),\dots,x_m(t))$ этой системы функция $x_i(t)$ является квазимногочленом (говоря о решениях системы, мы имеем в виду, что они действительны). Компонента x_i системы (0.1) вложима тогда и только тогда, когда для каждого решения $x(t)$ этой системы существует линейное стационарное уравнение вида

$$a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + a_0 z = 0,$$

для которого $x_i(t)$ является решением. Когда компонента $x_i(t)$ любого решения $x(t)$ системы (0.1) является одновременно и решением некоторого общего для всех решений $x(t)$ линейного стационарного уравнения, то эта компонента называется сильно вложимой. Дифференциальная система называется вложимой (сильно вложимой) если любая ее компонента вложима (сильно вложима).

Как вложимые, так и сильно вложимые системы, как правило, являются существенно нелинейными системами. В, частности, как показано в [8] они могут иметь несколько положений равновесия, предельные циклы и иметь другие качественные свойства, присущие только нелинейным системам.

С другой стороны, эти системы интегрируются в элементарных функциях. Правило нахождения решений задач Коши для этих систем см. в [8, с. 45]. Таким образом, мы можем найти отражающую функцию вложимой системы, и, значит, можем построить целый класс дифференциальных систем с такой же отражающей функцией [3, с. 71]:

$$\dot{x} = -0.5F_x(-t,F)F_t + F_x(-t,F)R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ есть произвольная вектор-функция. Дифференциальные системы из этого класса не обязаны быть вложимыми и интегрируемыми в квадратурах, однако они будут иметь те же качественные свойства, что и эквивалентная им вложимая система.

1 Полученные результаты

Ниже приведены теоремы, которые позволяют легко проверить любую кубическую относительно координат фазового вектора систему на предмет ее эквивалентности (в смысле совпадения отражающей функции) вложимым автономным системам

$$\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -xy^2$$

или

$$\dot{x} = y(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x(x^2 + y^2).$$

***Теорема* 1.1.** *Из всех кубических относительно координат фазового вектора систем лишь непрерывно дифференцируемая по t дифференциальная система вида*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 y, \quad \dot{y} = c(t)y - b(t)xy^2, \tag{1.1}$$

для коэффициентов которой выполнены условия:

1) *функции $a(t)$ и $c(t)$ – нечетные;*

2) *справедливо соотношение*

$$b(t) + b(-t) = 2 + 2t(a(t) + c(t)),$$

эквивалентна вложимой автономной системе

$$\dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -xy^2, \tag{1.2}$$

и при этом отражающая функция обеих этих систем имеет вид

$$F(t,x,y) = (xe^{-2txy}, ye^{2txy})^T.$$

Доказательство этой теоремы разбивается на два этапа. Сначала необходимо убедиться, что данная функция $F(t,x,y)$ действительно является отражающей функцией вложимой автономной системы (1.2). Для этого достаточно проверить выполнение основного соотношения для отражающей функции этой системы. Затем мы берем произвольную кубическую дифференциальную систему

$$\dot{x} = m_{00} + m_{10}x + m_{01}y + m_{20}x^2 + \ldots + m_{03}y^3,$$
$$\dot{y} = n_{00} + n_{10}x + n_{01}y + n_{20}x^2 + \ldots + n_{03}y^3$$

и подставляем ее правую часть в основное соотношение для отражающей функции $F(t,x,y)$. Приводим подобные члены относительно степеней $x^0, x, y, x^2, \ldots, y^3$ и приравниваем их к нулю, чтобы основное соотношение выполнялось. Отсюда получаем систему вида (1.1) и ограничения на ее коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$. Тем самым доказано, что только для кубических дифференциальных систем вида (1.1), функция $F(t,x,y)$ будет отражающей функцией. И, следовательно, система (1.1) и вложимая автономная система (1.2) эквивалентны.

***Замечание* 1.1.** Из условий 1) и 2) теоремы следует, что коэффициент $b(t)$ имеет вид

$$b(t) = 1 + \alpha(t) + t(a(t) + c(t) + \beta(t)),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция. Действительно, из условия 2) мы получаем четную часть функции $b(t)$:

$$\frac{b(t) + b(-t)}{2} = 1 + t(a(t) + c(t)).$$

Тогда нечетную часть функции $b(t)$ можно записать в виде $\alpha(t) + t\beta(t)$, где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция.

Примером может служить дифференциальная система

$$\dot{x} = -x\sin t + x^2 y(1 + \sin^3 t), \quad \dot{y} = y\sin t - xy^2(1 + \sin^3 t). \tag{1.3}$$

Первое условие теоремы, очевидно, выполняется. Проверим второе условие:

$$1 + \sin^3 t + 1 + \sin^3(-t) = 2 + 2t(-\sin t + \sin t).$$

Оба условия теоремы выполнены, поэтому дифференциальная система (1.3) эквивалентна вложимой автономной системе (1.2).

***Теорема* 1.2.** *Дифференциальная система (1.1) с 2ω-периодической по t правой частью не имеет других периодических решений, кроме решений, начинающихся при $t = -\omega$ на координатных осях.*

Доказательство. Правая часть системы (1.1) 2ω-периодична по t, а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Согласно основной лемме [3, с. 65] решение $\varphi(t;-\omega,x)$ системы (1.1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда x есть решение системы

$$xe^{2\omega xy} = x, \quad ye^{-2\omega xy} = y. \tag{1.4}$$

Если $x = 0$, то оба уравнения системы (1.4) обращаются в верные равенства для любого y:

$$0 = 0, \quad y = y.$$

Поэтому $x = 0, y = y(t)$ есть решение системы (1.4). Если $x \neq 0$, то можно разделить на него обе части первого уравнения системы (1.4):

$$e^{2\omega xy} = 1.$$

Отсюда $y = 0$. Но $y = 0$ является решением и второго уравнения системы (1.4) при любом x. Имеем еще одно решение системы (1.4):

$$x = x(t), \quad y = 0.$$

Рассматривая второе уравнение системы (1.4) получаем те же самые решения.

Таким образом, 2ω-периодическими будут лишь те решения системы (1.1), которые начинаются на координатных осях. Теорема доказана.

Согласно основной лемме [2, с. 12], если мы знаем отражающую функцию $F(t,x,y)$, то отображение за период $[-\omega;\omega]$ имеет вид $F(-\omega,x,y)$. Периодическое решение устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка отображения Пуанкаре устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива) [9, с. 177]. Исследование устойчивости неподвижной точки уже является алгебраической задачей.

***Теорема* 1.3.** *Отображение за период* $[-\omega;\omega]$ *системы* (1.1) *имеет вид:*

$$\Pi(x,y)=(xe^{2\omega xy},\, ye^{-2\omega xy})^T.$$

Можно утверждать, что периодические решения системы (1.1) не будут устойчивыми, так как функция ye^{2txy} неограниченно возрастает при росте t.

Граничное условие двухточечной краевой задачи всегда можно записать в виде

$$\Phi(x(\beta),x(\alpha))=0.$$

С помощью замены $\tau=t-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ любая двухточечная задача вида $\Phi(x(\beta),x(\alpha))=0$ сводится к задаче вида

$$\Phi(x(s),x(-s))=0, \tag{1.5}$$

где $s=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения из статьи [10, с. 775], которые можно сформулировать в виде утверждения.

***Утверждение* 1.1.** *Решение системы* (0.1) $x(t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $x(s)=x_0$, *будет решением задачи* (0.1), (1.5) *тогда и только тогда, когда оно продолжимо на* $[-s,s]$ *и является решением системы*

$$\Phi(x_0,F(s,x_0))=0.$$

***Теорема* 1.4.** *Решение системы* (1.1) $(x(t),y(t))^T$, *удовлетворяющее начальному условию* $x(s)=x_0,\ y(s)=y_0$, *будет решением задачи* (1.1), (1.5) *тогда и только тогда, когда оно является решением системы*

$$\Phi_1(x_0,\, x_0e^{-2sx_0y_0},\, y_0,\, y_0e^{2sx_0y_0})=0,$$
$$\Phi_2(x_0,\, x_0e^{-2sx_0y_0},\, y_0,\, y_0e^{2sx_0y_0})=0.$$

Доказательство состоит в ссылке на утверждение 1.1.

Как было упомянуто выше, метод отражающей функции позволяет нам построить целый класс дифференциальных систем, решения которых будут иметь те же качественные свойства, что и вложимая автономная система (1.2). В этом классе будут не только кубические системы вида (1.1), но и дифференциальные системы, решения которых мы не сможем записать в виде отношений, содержащих только квадратуры функций, задающих систему.

***Теорема* 1.5.** *Из всех кубических относительно координат фазового вектора систем лишь непрерывно дифференцируемая по* t *дифференциальная система вида*

$$\begin{aligned}\dot{x}&=a(t)x+c(t)y+b(t)y(x^2+y^2),\\ \dot{y}&=a(t)y-c(t)x-b(t)x(x^2+y^2),\end{aligned} \tag{1.6}$$

для коэффициентов которой выполнены условия:

1) *функции* $a(t)$ *и* $c(t)$ *– нечетные;*

2) *имеет место соотношение*

$$b(t)+b(-t)=2+4ta(t),$$

эквивалентна вложимой автономной системе

$$\dot{x}=y(x^2+y^2),$$
$$\dot{y}=-x(x^2+y^2),$$

и при этом отражающая функция обеих этих систем имеет вид

$$F(t,x,y)=(x\cos 2(x^2+y^2)t-y\sin 2(x^2+y^2)t,$$
$$x\sin 2(x^2+y^2)t+y\cos 2(x^2+y^2)t)^T.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.1.

***Замечание* 1.2.** По аналогии с замечанием к теореме 1 из условий 1) и 2) теоремы 1.5 следует, что коэффициент $b(t)$ имеет вид

$$b(t)=1+\alpha(t)+2t(a(t)+\beta(t)),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $\beta(t)$ – четная функция.

***Теорема* 1.6.** *Дифференциальная система* (1.6) *имеет бесконечно много* 2ω*-периодических решений. Это те и только те решения, которые удовлетворяют начальному условию*

$$x^2(-\omega)+y^2(-\omega)=\frac{\pi k}{\omega},$$

где ω *есть полупериод коэффициентов правой части.*

Доказательство. Правая часть системы (1.6) 2ω-периодична по t, а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Согласно основной лемме [3, с. 65] решение $\varphi(t;-\omega,x)$ системы (1.6) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $(x,y)^T$ есть решение системы

$$\begin{aligned}x\cos 2(x^2+y^2)\omega+y\sin 2(x^2+y^2)\omega&=x,\\ -x\sin 2(x^2+y^2)\omega+y\cos 2(x^2+y^2)\omega&=y.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Систему (1.7) можно записать иначе:

$$x(\cos 2(x^2+y^2)\omega-1)+y\sin 2(x^2+y^2)\omega=0,$$
$$-x\sin 2(x^2+y^2)\omega+y(\cos 2(x^2+y^2)\omega-1)=0.$$

Эта система будет иметь не только нулевое решение, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos 2(x^2+y^2)\omega-1 & \sin 2(x^2+y^2)\omega \\ -\sin 2(x^2+y^2)\omega & \cos 2(x^2+y^2)\omega-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$(\cos 2(x^2+y^2)\omega-1)^2+\sin^2 2(x^2+y^2)\omega=0.$$

Раскроем скобки и упростим уравнение:

$$2-2\cos 2(x^2+y^2)\omega=0.$$

Или

$$\cos 2(x^2+y^2)\omega=1.$$

Решив это уравнение, получаем

$$x^2+y^2=\frac{\pi k}{\omega},\quad k\in N_0.$$

Теорема доказана.

***Теорема* 1.7.** *Отображение за период* $[-\omega;\omega]$ *системы* (1.6) *имеет вид:*

$$\Pi(x,y)=(x\cos 2(x^2+y^2)\omega+y\sin 2(x^2+y^2)\omega,$$
$$-x\sin 2(x^2+y^2)\omega+y\cos 2(x^2+y^2)\omega)^T.$$

***Теорема* 1.8.** *Решение системы* (1.6) $(x(t),y(t))^T$, *удовлетворяющее начальному условию*

$$x(s)=x_0,\, y(s)=y_0,$$

будет решением задачи (1.6), (1.5) *тогда и только тогда, когда оно является решением системы*

$$\Phi_1(x_0, x_0\cos 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s-y_0\sin 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s,$$
$$y_0, x_0\sin 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s+y_0\cos 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s)=0,$$
$$\Phi_2(x_0, x_0\cos 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s-y_0\sin 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s,$$
$$y_0, x_0\sin 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s+y_0\cos 2(x_0{}^2+y_0{}^2)s)=0.$$

Доказательство состоит в ссылке на утверждение 1.1

В качестве примера системы вида (1.6) можно рассмотреть дифференциальную систему

$$\dot{x}=y\sin\sqrt{7}t\cos t+(1+\sin^5 t)y(x^2+y^2),$$
$$\dot{y}=-x\sin\sqrt{7}t\cos t-(1+\sin^5 t)x(x^2+y^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* Об одном классе дифференциальных систем с элементарными решениями / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4, № 6. – С. 1154–1156.

2. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Университетское, 1986. – 76 с.

3. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 196 с.

4. *Мироненко, В.И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

5. *Musafirov, E.V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Jornal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

6. *Mironenko, V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

7. *Мироненко, В.И.* Временные симметрии уравнения Риккати / В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 31–33.

8. *Мироненко, В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Мн. : Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

9. *Арнольд, В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : «Наука», 1971. – 240 с.

10. *Мироненко, В.И.* Метод отражающей функции для краевых задач / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 6. – С. 774–779.

Поступила в редакцию 27.05.11.